

Matematika Felmérő Megoldásokkal

RKK 2025. Augusztus

1. Hozza közös nevezőre és egyszerűsítse az $\frac{5-4x}{7x-7} - \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ kifejezést! Milyen x -ekre van értelmezve?

Megoldás:

$$\frac{5-4x}{7x-7} - \frac{5x-1}{(x-1)^2} = \frac{5-4x}{7(x-1)} - \frac{5x-1}{(x-1)^2} = \frac{(5-4x)(x-1) - 7(5x-1)}{7(x-1)^2} = \frac{5x-5-4x^2+4x-35x+7}{7(x-1)^2} = \frac{-4x^2-26x+2}{7(x-1)^2}$$

A kifejezés értelmezve van minden valós x értékre, kivéve $x=1$ (mert a nevező nem lehet nulla)
azaz $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$

2. Egyszerűsítse az $\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ racionális kifejezést ott, ahol értelmezve van!

Megoldás:

$$\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-1)}{(x+2)}; \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2\}$$

A nevező nem lehet nulla!

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$$

3. Írja fel a és b egy-egy hatványának a szorzataként a $\frac{(\sqrt{a})^{-3} b^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{9}{8}} (\sqrt[3]{a})^6}$ kifejezést!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{a})^{-3} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{9}{8}} (\sqrt[3]{a})^6} &= \frac{a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{9}{8}} \cdot a^{\frac{6}{3}}} = a^{-\frac{3}{2} - \frac{6}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{2} - \frac{9}{8}} = a^{-\frac{3}{2} - 2} \cdot b^{-\frac{1}{2} - \frac{9}{8}} = \\ &= a^{-\frac{3}{2} - \frac{4}{2}} \cdot b^{-\frac{4}{8} - \frac{9}{8}} = a^{-\frac{7}{2}} b^{-\frac{13}{8}} \end{aligned}$$

4. Számítsa ki a $17+21+25+\dots+169$ összeget!

Megoldás:

Számtani sorozatról van szó: $a_1 = 17, d = 4$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 169 = 17 + (n-1)4 \Rightarrow n = 39$$

$$S_n = 17 + 21 + 25 + \dots + 169 = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{17 + 169}{2} \cdot 39 = 3627$$

5. Írja fel egyszerűbb alakban a $\lg \left(\sqrt[3]{1000} \cdot 100^{\frac{9x}{2}} \right)$ kifejezést!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \lg \left(\sqrt[3]{1000} \cdot 100^{\frac{9x}{2}} \right) &= \lg \left(10 \cdot 100^{\frac{9x}{2}} \right) = \lg 10 + \lg 100^{\frac{1}{2} \cdot 9x} = \\ &= 1 + \lg (\sqrt{100})^{9x} = 1 + \lg 10^{9x} = 1 + 9x \end{aligned}$$

6. Oldja meg a $4x^3 = x - 3x^2$ egyenletet!

Megoldás:

$$4x^3 = x - 3x^2 \Rightarrow 4x^3 + 3x^2 - x = 0 \Rightarrow x(4x^2 + 3x - 1) = 0$$

Mivel a szorzat értéke akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, ezért:

$x_1 = 0$, vagy $4x^2 + 3x - 1 = 0$, amiből kapunk még két megoldást:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \text{ és } x_3 = -1$$

7. Állapítsa meg az 1, $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ oldalakkal rendelkező háromszög szögeit!

Megoldás 1:

Legyen α az 1 hosszúságú oldallal szemközti szög, β a $\sqrt{2}$ hosszúságú oldallal szemközti szög és γ a harmadik szög. Pitagorasz tétele alapján $\sqrt{3}^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2$, tehát a γ szög derékszög: $\gamma = 90^\circ$, és $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{1} \Rightarrow \beta = 54,74^\circ$, és végül: $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 35,26^\circ$.

Megoldás 2:

Legyen α az 1 hosszúságú oldallal szemközti szög, β a $\sqrt{2}$ hosszúságú oldallal szemközti szög és γ a harmadik szög. Alkalmazva kétszer a koszinusztételt:

$$1^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} \cos(\alpha) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 35,26^\circ$$

$$\sqrt{2}^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} \cos(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 54,74^\circ$$

És végül: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$

8. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely az y tengelyt $(a - 2)$ -ben metszi és irányszöge 60° !

Megoldás:

Az egyenes irányszöge 60° , tehát a meredeksége: $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Az $(x_0, y_0) = (0, -2)$ rajta van a keresett egyenesen. Így az egyenes egyenlete:

$$y = y_0 + m(x - x_0) \Rightarrow y = -2 + (\sqrt{3} - 0), \text{ tehát: } y = \sqrt{3}x - 2$$

9. Határozza meg az $f(x) = x^2 - 6x + 10$ függvény

- a) értelmezési tartományát,
- b) grafikonját,
- c) értékkészletét,
- d) tengelymetszeteit,
- e) minimum és maximum helyeit és értékeit.

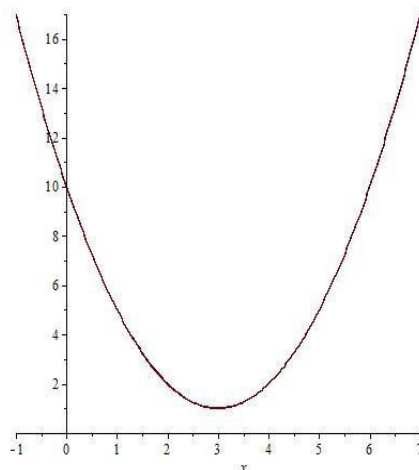
Megoldás:

a) A másodfokú függvény minden x valós számra van értelmezve, tehát: $D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$

b) A másodfokú polinom teljes négyzetté átalakításával:

$$f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1,$$

látjuk, hogy az $f(x)$ függvény grafikonja az alap $y = x^2$ parabolából egy vízszintes és egy függőleges eltolással kapható. Így a grafikon a következő:



- c) A függvény értékkészlete az $[1, \infty)$ intervallum ($R_f = [1, \infty)$).
- d) x tengely metszete nincs, y tengely metszete $y = f(0) = 10$.
- e) maximum helye nincs, minimum helye $x=3$ és minimum értéke $y=1$.

10. Mely valós x értékekre értelmezhető az $\frac{1}{\cos x - 1}$ kifejezés?

Megoldás:

A kifejezésnek akkor van értelme, ha $\cos x \neq 1$, tehát $x \neq k 2\pi$, k tetszőleges egész szám.

11. Gyöktelenítse a következő tört nevezőjét:

$$\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{5}}-\sqrt{2}} !$$

Megoldás:

Beszorzom a törtet eggyel, de az egyet a nevező konjugáltjaként írom fel:

$$\frac{2}{(\sqrt{10+\sqrt{5}}-\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2})}{(\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2})} = \frac{2((\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2}))}{(\sqrt{10+\sqrt{5}})^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{2((\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2}))}{10+2\sqrt{50}+5-2} = \frac{2((\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2}))}{13+2\sqrt{50}}$$

Ezt a törtet is gyöktelenítem:

$$\frac{2((\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2}))}{13+2\sqrt{50}} \cdot \frac{13-2\sqrt{50}}{13-2\sqrt{50}} = \frac{2((\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2}))(13-2\sqrt{50})}{169-4 \cdot 50} = \frac{2((\sqrt{10+\sqrt{5}}+\sqrt{2}))(13-2\sqrt{50})}{-31}$$

12. Oldja meg a két-ismeretlenes egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$8y - \frac{25}{(x+y)^2} = 0$$

$$D: (x+y)^2 \neq 0 \Rightarrow x+y \neq 0 \Rightarrow x \neq -y$$

$$2x - \frac{25}{(x+y)^2} = 0$$

Megoldás:

Mindkét egyenletben a törtet átviszem az egyenlet jobb oldalára:

$$8y = \frac{25}{(x+y)^2}$$

$$2x = \frac{25}{(x+y)^2}$$

Ha az egyenlőség jobb oldala egyenlő, akkor a bal oldal is egyenlő kell legyen:

$$8y = 2x \Rightarrow y = \frac{1}{4}x; \text{ ezt visszaírom bármelyik eredeti egyenletbe:}$$

$$8 \cdot \frac{1}{4}x = \frac{25}{(x+\frac{1}{4}x)^2} \Rightarrow 2x = \frac{25}{(\frac{5}{4}x)^2} \Rightarrow 2x = \frac{25}{\frac{25}{16}x^2} \Rightarrow 2x = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{1}{4}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

13. Oldja meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet!

$$(x^2 - 10x)^2 - 384 = 8x^2 - 80x$$

Megoldás:

Kiemelek a jobb oldali kifejezésből 8-at és nullára rendezem az egyenletet:

$$(x^2 - 10x)^2 - 8(x^2 - 10x) - 384 = 0$$

Az egyenlet az $(x^2 - 10x)$ kifejezésben egy másodfokú egyenlet, legyen $(x^2 - 10x) = m$
 $m^2 - 8m - 384 = 0$

Alkalmazom a másodfokú megoldóképletet: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 1 \cdot 384}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{1600}}{2} = \frac{8 \pm 40}{2}$

amiből $m_1 = 24$ és $m_2 = -16$

Mivel $m = x^2 - 10x$ értékeként határoztuk meg, ezért

$x^2 - 10x = 24$ és $x^2 - 10x = -16 \Rightarrow$ ezeket az egyenleteket is nullára rendezem és megoldom, az eredmények:

$x_1 = 12$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$ és $x_4 = 8$ a feladat feltétele miatt az $x_2 = -2$ nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldása az egyenletnek.

14. Ábrázolja lépésenként, koordináta rendszerben az alábbi függvényt: $5y + 2x = 40$.

Megoldás:

Ábrázolni egyenest csak úgy lehet, ha először $y = mx + b$ alakra hozzuk, ahol m az egyenes meredeksége és b az y tengelymetszete. Az egyenlet némi rendezés után $y = -\frac{2}{5}x + 8$ alakú lesz.

Az ábrázolás menete: $y = x \Rightarrow y = -x \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 8$

